Corrigé – Devoir pour la rentrée – Préparation aux Maths Complémentaires

A n'utiliser qu'après avoir VRAIMENT cherché et rédigé les exercices !

Exercice 1 : Révisions calculatoires

1.

$$A = \frac{\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}}{\frac{y}{x-y} + \frac{x}{x+y}} = \frac{\frac{x(x+y) - y(x-y)}{x^2 - y^2}}{\frac{y(x+y) + x(x-y)}{x^2 - y^2}} = \frac{x^2 + y^2}{y^2 + x^2} = 1$$

$$B = \frac{1}{x - \frac{1}{3 + \frac{x-2}{5-x}}} = \frac{1}{x - \frac{5-x}{13-2x}} = \frac{13 - 2x}{-2x^2 + 14x - 5}$$

2. $A = \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}\right)^2 = 57 - 12\sqrt{15}$ $\quad B = \left(7\sqrt{2} - 5\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}\right) = 23$

$C = \left(7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}\right)\left(-7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}\right) = -218$ $\quad D = \left(\sqrt{72} - \sqrt{288}\right)\left(\sqrt{288} - \sqrt{72}\right) = -72$

$$E = \left(2 - \sqrt{3}\right)^n \left(2 + \sqrt{3}\right)^n = \left[\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]^n = 1^n = 1$$

3.

$$A = \frac{1}{5 - 2\sqrt{2}} = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{17} \qquad B = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5} + 1} = \frac{30 - 3\sqrt{5}}{19}$$

$$C = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)}{57} = \frac{9 + 2\sqrt{6}}{57}$$

4.

$$A = [(a^2b^3)^4]^5 = a^{40}b^{60} \qquad B = (a^3b^{-4})^2 \times (-2a^{-5}b^6)^3 = -8a^{-9}b^{10};$$

$$C = \left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 \times \left(\frac{a}{4b}\right)^3 \times \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 = \frac{a^5}{64b^5} \qquad D = \left(\frac{a^1b^{-2}}{a^{-3}b^4}\right)^5 \div \left(\frac{a^{-6}b^5}{a^4b^{-3}}\right)^3 = a^{50}b^{-54}$$

5.

$$A = (-4)^{60} \times (-0{,}125)^{41} = -(2^{120} \times 2^{-123}) = -0{,}125$$

$$B = 40^{71} \times (1{,}25)^{48} \times 10^{-119} = 2^{213}.5^{71}.5^{48}.2^{-96}.2^{-119}.5^{-119} = 2^{-2} = 0{,}25$$

Exercice 2 :

1). E_1: $\quad x^2 - 5x - 6 = 0$ $\quad$ -1 est une racine évidente, or $ax_1x_2 = -6$ $\quad$ d'où 6 est l'autre racine.
(autre méthode : utilisation du discriminant)

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1; 6\}}$$

E_2: $\quad x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de E_2 si et seulement si (ssi) $\left(x - \sqrt{3}\right)^2 = 0$ (identité remarquable)

ssi $\quad x = \sqrt{3}$ $\qquad$ d'où $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{3}\right\}}$

E_3: $\quad x^2 + 2x + 2 = 0$ $\quad$ Calculons le discriminant du polynôme $x^2 + 2x + 2$: $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$
Donc ce polynôme du 2nd degré n'admet pas de racines. $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

I_4: $\quad -6x^2 + 12x + 90 \geq 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de I_4 ssi $\quad x^2 - 2x - 15 \leq 0$

Calculons le discriminant du polynôme $x^2 - 2x - 15$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64 = (8)^2 > 0$

Donc ce polynôme du 2nd degré admet deux racines $\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-8}{2} = -3 \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+8}{2} = 5 \end{cases}$

Or un polynôme du 2nd degré est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines donc $\boxed{\mathcal{S} = [-3; 5]}$

I_5: $\dfrac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0$ $\qquad \Delta = (-1)^2 - 4 \times \dfrac{1}{4} \times 1 = 0$

donc le polynôme $\frac{1}{4}x^2 - x + 1$ admet une seule racine : $x_0 = -\frac{b}{2a} = 2$. D'où $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$

E_6: $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de E_6 ssi $2x^2 + 3 = 7x$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

ssi $x = \frac{7-\sqrt{25}}{4} = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{7+\sqrt{25}}{4} = 3$ $(\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25)$ D'où $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}}$

I_7: $e^{3x+5} \leq 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est solution de E_6 ssi $e^{3x+5} \leq e^0$

ssi $3x + 5 \leq 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

ssi $x \leq -\frac{5}{3}$ D'où $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; -5/3]}$

2) a) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3$ donc $\boxed{f(x) = (x-1)^2 - 4}$

b) $-2 \leq x \leq 0 \; ssi \; 0 \leq x^2 \leq 4$ car la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

et $-2 \leq x \leq 0 \; ssi \; 0 \leq -2x \leq 4$

donc si $-2 \leq x \leq 0$ alors $0 + 0 - 3 \leq x^2 - 2x - 3 \leq 4 + 4 - 3$ c'est-à-dire $\boxed{f(x) \in [-3; 5]}$

<u>Autre méthode possible</u> : om montre que f est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et donc que :

si $-2 \leq x \leq 0$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(-2)$.

3) a) $P(4) = 4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$ donc $\boxed{\text{4 est racine de } P(x).}$

b) $(x-4)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + x^2(-4a + b) + x(-4b + c) - 4c$

or $P(x) = x^3 - 15x - 4$ donc par identification, on en déduit que $a = 1, b = 4a = 4,$ $c = 1$

donc $\boxed{P(x) = (x-4)(x^2 + 4x + 1)}$

Cherchons les racines de $x^2 + 4x + 1$: . $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12$ donc $\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$

D'où $P(x) = (x-4)(x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$

<u>Tableau de signe</u> :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2-\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left[-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}\right] \cup [4; +\infty[}$

4) I_9 : $-x^2 + \sqrt{3} + \frac{6}{x^2} \leq 0$ <u>Valeur interdite</u> : $x = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^*, x$ est solution de I_9 ssi $\frac{-x^4+\sqrt{3}x^2+6}{x^2} \leq 0$

$$ssi -x^4+\sqrt{3}x^2+6 \leq 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2>0$$

On pose $X = x^2$ et on résout $-X^2+\sqrt{3}X+6 \leq 0$: $\Delta = 27 > 0$ donc $\begin{cases} X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{27}}{-2} = 2\sqrt{3} \\ X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{27}}{-2} = -\sqrt{3} \end{cases}$

Soit $-(X+\sqrt{3})(X-2\sqrt{3}) \leq 0$ Or $X = x^2$ donc on résout $-(x^2+\sqrt{3})(x^2-2\sqrt{3}) \leq 0$
Or $x^2+\sqrt{3} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ donc il suffit de résoudre $x^2-2\sqrt{3} \geq 0$

$x^2-2\sqrt{3} \geq 0$ ssi $(x-\sqrt{2\sqrt{3}})(x+\sqrt{2\sqrt{3}}) \geq 0$ or un polynôme du 2nd degré est du signe de a à l'extérieur des racines donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; -\sqrt{2\sqrt{3}}] \cup [\sqrt{2\sqrt{3}}; +\infty[}$

E_{10} : $|-3x+4|+|-5+x| = 10$
On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue : $-3x+4=0$ soit $x = 4/3$ et $-5+x=0$ soit $x=5$
On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$\lvert -3x+4\rvert$		$-3x+4$	0	$3x-4$	11	$3x-4$	
$\lvert -5+x\rvert$		$5-x$	$\frac{11}{3}$	$5-x$	0	$-5+x$	
(E_1)		$-4x+9=10$ $x=-\frac{1}{4}$ possible		$2x+1=10$ $x=\frac{9}{2}$ possible		$4x-9=10$ $x=\frac{19}{4}$ impossible	

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}; \frac{9}{2}\right\}}$

I_{11}: $|2x-1| \leq |x+2|$
On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue : $2x-1=0$ soit $x=\frac{1}{2}$ et $x+2=0$ soit $x=-2$
On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$		$-2x+1$	5	$-2x+1$	0	$2x-1$	
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$	0	$x+2$	$\frac{5}{2}$	$x+2$	
(E_2)		$-2x+1 \leqslant -x-2$ $x \geqslant 3$ impossible $S_1 = \varnothing$		$-2x+1 \leqslant x+2$ $x \geqslant -\frac{1}{3}$ $S_2 = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$		$2x-1 \leqslant x+2$ $x \leqslant 3$ $S_3 = \left[\frac{1}{2}; 3\right]$	

D'où $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = [-\frac{1}{3}; 3]}$

I_{12} : $x+1 \geq \sqrt{3-x}$ $\sqrt{3-x}$ est définie pour $x \leq 3$. De plus, pour que l'inéquation soit possible, il faut que $x+1 \geq 0$ donc $x \in [-1; 3]$.

On élève chacun des membres de I_{12} au carré, on peut garder l'équivalence car chacun des membres de l'inégalité est positif sur $[-1; 3]$ et que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in [-1; 3]$, x est solution de I_{12} ssi $(x+1)^2 \geq 3-x$, soit $x^2+3x-2 \geq 0$.

Les racines du polynôme x^2+3x-2 sont $\begin{cases} x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ Or un polynôme du 2nd degré est du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines et $x \in [-1; 3]$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; 3\right]}$

I_{13} : $e^{2x}+3e^x-4 \geq 0$ On pose $X = e^x$ et on résout alors $X^2+3X-4 \geq 0$, soit $(X-1)(X+4) \geq 0$

Or un polynôme du 2nd degré est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines donc $e^x \leq -4$ ou $e^x \geq 1$

$e^x \leq -4$ est impossible et $e^x \geq 1 \; ssi \; x \geq 0$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}^+}$

Exercice 3 : Etude de fonctions

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$, f est définie sur $\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \end{array}\right\}$ car la limite en l'infini d'un polynôme correspond à celle du monôme de plus haut degré.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme. $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$

Un polynôme du second degré est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines donc :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f	$-\infty$	↗	2	↘	-30	↗	$+\infty$

2) $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$, f est définie sur $\mathbb{R}^+$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

• f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit de fonctions dérivables.

$f = u \times v$ avec $u(x) = 2 - x$, $u'(x) = -1$, $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f' = u' \times v + u \times v'$ donc $f'(x) = -\sqrt{x} + \frac{2-x}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}(1 - \frac{3}{2}x)$ $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{3}{2}x$

<u>Tableau de variation de f :</u>

x	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	+	0	−	
Variations de f	0	↗	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	↘	$+\infty$

• <u>Equation de la tangente au point d'abscisse 1 :</u>

$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

or $f'(1) = -\frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$

Donc $T_1 : y = -\frac{1}{2}(x-1) + 1 = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

3) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f(x) = \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$

• f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ comme fonction rationnelle.

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x - 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x - 3$, $v'(x) = 1$

$f' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f'(x) = \frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$ et sur $]3; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \frac{2x-3}{1+\frac{1}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

• f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme fonction rationnelle.

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 3x$, $u'(x) = 2x - 3$, $v(x) = x + 1$, $v'(x) = 1$

$f' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ donc $f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

Donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 3$, donc du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

• Montrons que $\Omega(-1;-5)$ est un centre de symétrie. Pour ce faire, montrons que Ω est le milieu de $[MM']$, M ayant pour abscisse $-1+h$ et M' ayant pour abscisse $-1-h$ avec $h \in \mathbb{R}^*$.
$-1+h \in \mathcal{D}_f$ et $-1-h \in \mathcal{D}_f$. Calculons $f(-1+h)$ et $f(-1-h)$

$$\left.\begin{aligned} f(-1+h) &= \frac{h^2-2h+1+3-3h}{h} = h-5+\frac{4}{h} \\ f(-1-h) &= \frac{h^2+2h+1+3+3h}{-h} = -h-5-\frac{4}{h} \end{aligned}\right\} \text{ donc } \quad \frac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2} = -5$$

Donc $x_\Omega = \frac{x_M+x'_M}{2}$ et $y_\Omega = \frac{y_M+y'_M}{2}$. Donc $\Omega(-1;-5)$ est bien centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$

• $f(x) = \frac{x^2+x-4x-4+4}{x+1} = \frac{x(x+1)-4(x+1)+4}{x+1}$ donc $f(x) = x-4+\frac{4}{x+1}$ (autre méthode : identification).
• On a $f(x)-(x-4) = \frac{4}{x+1}$ donc $\forall x \in]-\infty;-1[, f(x)-(x-4) < 0$ et $\forall x \in]-1;+\infty[, f(x)-(x-4) > 0$
Donc $\mathcal{C}$ est en-dessous de Δ sur $]-\infty;-1[$ et $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ sur $]-1;+\infty[$.

5) $f(x) = 3e^{2-x}+e$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = -3e^{2-x} < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

$$f(x) = ax+b-\frac{c}{x+2}$$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$f'(x) = a+\frac{c}{(x+2)^2}$$

2) $A(1;2) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(1) = a+b-\frac{c}{3} = 2$

$T_{-1}: y = -x-1$ donc $f'(-1) = -1$ soit $a+c = -1$ et $f(-1) = 0$ soit $-a+b-c = 0$

On résout donc le système : $\begin{cases} a+b-\frac{c}{3} = 2 \\ a+c = -1 \\ -a+b-c = 0 \end{cases} \quad (S)$

(a,b,c) est solution de (S) $ssi \begin{cases} a+b-\frac{c}{3} = 2 \\ a+c = -1 \\ b = -1 \quad (l_2+l_3 \to l_3) \end{cases}$ $ssi \begin{cases} a-\frac{c}{3} = 3 \\ a = -1-c \\ b = -1 \end{cases}$ $ssi \begin{cases} -\frac{4c}{3} = 4 \\ a = -1-c \\ b = -1 \end{cases}$ $ssi \begin{cases} c = -3 \\ a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

Donc $\boxed{f(x) = 2x-1+\frac{3}{x+2}}$

3) Deux droites sont parallèles quand elles ont même coefficient directeur. Or le coefficient de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x vaut $f'(x)$. On résout donc $f'(x) = 1$.

x est solution de l'équation $f'(x) = 1$ ssi $2-\frac{3}{(x+2)^2} = 1$ ssi $3 = (x+2)^2$ ssi $x^2+4x+1 = 0$ ssi $\begin{cases} x_1 = -2-\sqrt{3} \\ x_2 = -2+\sqrt{3} \end{cases}$

La tangente à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisse x_1 et x_2 est parallèle à Δ.

Exercice 5 : Calcul de dérivées de fonctions composées

1) $f: x \longmapsto 5x-2 \longmapsto \sqrt{5x-2}$ donc $f(x) = h \circ i(x)$ avec $h(x) = \sqrt{x}$ et $i(x) = 5x-2$

h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

i est dérivable sur $\mathbb{R}$, $i(x) > 0$ pour $x > \frac{2}{5}$ et $i'(x) = 5$

Donc f est dérivable sur $]\frac{2}{5};+\infty[$, $f' = i' \times h'(i)$

Donc $\boxed{f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-2}}}$

2) $g: x \longmapsto 2x-3 \longmapsto (2x-3)^5$ donc $g(x) = j \circ k(x)$ avec $j(x) = x^5$ et $k(x) = 2x-3$
j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $j'(x) = 5x^4$ k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = 2$
Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $g' = k' \times j'(k)$ Donc $\boxed{g'(x) = 10(2x-3)^4}$

3) $h: x \longmapsto x^2-3x \longmapsto e^{x^2-3x}$ donc $h(x) = l \circ m(x)$ avec $l(x) = e^x$ et $m(x) = x^2-3x$
l est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $l'(x) = e^x$ m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $m'^{(x)} = 2x-3$
Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$, $h' = m' \times l'(m)$ Donc $\boxed{h'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x}}$

Exercice 6 : Suites

1) $u_n = u_0 + nr$ donc $u_0 = u_{100} - 100r = 650 - 100 \times 8 = -150$

2) $S = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 59049 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{10}$
C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3 donc $S = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{1-3^{11}}{1-3} = 88573$
$S' = 1 + 4 + 7 + \cdots + 1000$. C'est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 3. Donc $u_n = u_0 + nr$
Le nombre de termes est $n+1 = \frac{u_n - u_0}{r} + 1$. Soit $n + 1 = \frac{1000-1}{3} + 1 = 334$ donc $S' = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = 334 \times \frac{1001}{2} = 167167$

3) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathrm{u_n} = \frac{n}{1+n}$

a. $\mathrm{u_0} = 0$ $\mathrm{u_1} = \frac{1}{2}$ $u_2 = \frac{2}{3}$ $u_3 = \frac{3}{4}$

$\mathrm{u_1} - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc u n'est pas une suite arithmétique.
$\frac{u_2}{\mathrm{u_1}} \neq \frac{u_3}{u_2}$ donc u n'est pas une suite géométrique.

b. On calcule $\mathrm{u_{n+1}} - \mathrm{u_n}$

$$\mathrm{u_{n+1}} - \mathrm{u_n} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite u est croissante.

4) Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par 4. On note $\mathcal{P}(n): u_n \leq 4$

Initialisation : $u_0 = 0 \leq 4$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

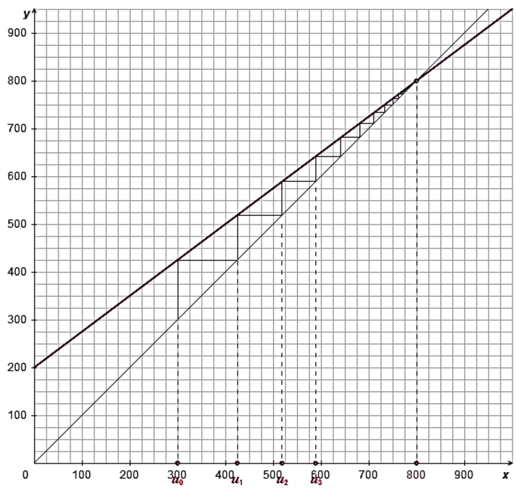
Hérédité : **Soit $\boldsymbol{n}$** $\in \mathbb{N}$. Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 4$.
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 4$.

$u_n \leq 4$ donc $3u_n + 4 \leq 3 \times 4 + 4$. Or, $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $\sqrt{3u_n + 4} \leq \sqrt{16}$

D'où $u_{n+1} \leq 4$ ($\mathcal{P}(n+1)$ est vraie)

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$

Exercice 7 : Suite arithmético-géométrique



1)- Pour obtenir la représentation des quatre premiers termes de la suite :
- Placer le terme initial $u_0 = 300$ sur l'axe des abscisses,
- Comme $u_1 = 0{,}75u_0 + 200$, u_1 est l'ordonnée de la droite d'équation $y = 0{,}75.x + 200$ d'abscisse 300,
- A l'aide de la droite d'équation $y = x$, rabattre l'ordonnée u_1 sur l'axe des abscisses,
- Poursuivre ce procédé pour représenter u_2 et u_3.

Graphiquement, la suite semble converger vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites. Cette abscisse est solution de l'équation $x = 0{,}75x + 200$, c'est-à-dire $x = 800$.

La suite semble donc converger vers 800.

2)- a- $\forall n$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 800 = 0{,}75.u_n + 200 - 800 = 0{,}75(v_n + 800) - 600 = 0{,}75v_n$
Donc la suite v est bien géométrique de raison 0,75 et de premier terme $v_0 = u_0 - 800 = -500$
b- $v_n = v_0.q^n = -500 \times 0{,}75^n$ donc $u_n = v_n + 800 = 800 - 500 \times 0{,}75^n$
c- $0 < 0{,}75 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -500 \times 0{,}75^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 800$

3)- a- On cherche n tel que $u_n \geq 790$. On écrit un algorithme sur la calculatrice permettant de trouver la première valeur de n vérifiant l'inégalité.

Initialisation
U prend la valeur 300
N prend la valeur 0
Traitement
Tant que U<790
    U prend la valeur U*0,75+200
    N prend la valeur N+1
Fin Tant que

Sortie
Afficher N
On trouve : *n=14.*

Le nombre d'abonnés sera supérieur à 790 à partir de 2024.

b- $u_n = 800 - 500 \times 0{,}75^n$ donc la suite *u* est majorée par 800. Le gérant ne pourra donc jamais espérer 1000 abonnés.

Exercice 8 : Probabilités conditionnelles

1. A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers étudié donc $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$
   Donc $P(A \cap B) = P(B) - P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}39 - 0{,}9 \times 0{,}4 = 0{,}03$
2. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}03}{0{,}1} = 0{,}3$